



TITLE:

# パラメトリックな制御系設計について(数式処理研究の新たな発展)

AUTHOR(S):

北本, 卓也; 山口, 哲

---

CITATION:

北本, 卓也 ...[et al]. パラメトリックな制御系設計について(数式処理研究の新たな発展). 数理解析研究所講究録 2007, 1572: 11-21

ISSUE DATE:

2007-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81311>

RIGHT:

## パラメトリックな制御系設計について

北本卓也

山口哲

山口大・教育学部

サイバネットシステム

### 1 序論

制御系設計はこれまで主として MATLAB 等の行列計算数値パッケージを用いて行われて来た。これらの数値パッケージでは、行列の固有値や固有ベクトル、特異値、数値的最適化等が効率的に行えるようになっており、それに基づいて制御系設計のための様々な機能が組み立てられている。これまで制御系設計に数式処理が制御系設計に活用されることはあまりなかったが、この理由としては、計算スピード、計算量、現実的な速度で取り扱える問題のサイズなどで色々問題があったことによるものと、5 次以上の代数方程式に解の公式が存在しないなどの数学的な原理によるものが挙げられる。数少ない、制御系設計への数式処理の応用の試みとして次の 2 つがある。

1. 近似固有値、固有ベクトルなどのべき級数演算の活用
2. QE (Quantifier Elimination) を活用した制御系設計

上の 1. は著者らによる一連の研究 ([1]-[23]) により行われてきたものである。これは解析関数を打ち切りべき級数で表現することにより、数式を含む演算を柔軟にしようとするものであり、SCILAB 上で動くパッケージソフトなども開発されている (詳細は [22] を参照)。この方法の問題点としては以下のものが挙げられる。

- (a) 打ち切りべき級数による近似なので、打ち切り誤差を考慮する必要がある。
- (b) べき級数なので収束半径を考慮する必要がある。
- (c) 一般に浮動小数点数を用いるので、その精度に気を配る必要がある。

一方、2. は [25]-[31] で取り扱われているが、数式処理の強力な手法である QE (Quantifier Elimination) を制御系設計に活用しようとする試みである制御系設計に関する設計問題の多くは、QE の問題として定義可能)。この方法の問題点はなんと言ってもその計算量があまりに大きく、現実的なサイズの問題を扱うのが困難であることである。これに対し、[24] では QE を特殊化した SDC (Sign Definite Condition) を用いて計算量の軽減を図っているが、この手法で取り扱えるのは PI 制御器をベースにした 1 入力 1 出力システムのみであり、多入力多出力のシステムは取り扱えない。

本稿では、上の 1., 2. と異なる新たな数式処理の制御系設計への応用について述べる。この手法は QE の特殊化の 1 つと考えることができるが、 $H_2$  最適制御や  $H_\infty$  制御等の Riccati 方程式を用いた制御理論を活用することが出来る点が [24] と異なっている。本稿は次の構成をとる。

## 2 制御系設計の多項式の根

本稿で提案する手法は「制御系設計に関する量の多くは多項式の根として表せる」という事実によっている。実際、制御系設計において重要な次の量は全て多項式の根として表す事が可能である。

1. 与えられた伝達関数の  $H_\infty$  ノルム ([25]-[26])
2.  $H_\infty$  制御系設計問題 (状態フィードバック [30]、出力フィードバック [31])
3.  $H_2$  最適制御系設計における評価関数の最小値 ([29])
4. Hankel 特異値、またはその比

本稿ではこれらのうち 1. - 3. について解説する。

以下では、 $\Psi_x(f(x), m)$  で多項式  $f(x)$  の  $m$  番目の実根を表すことにする。

## 3 基本アルゴリズム

実区間  $\Omega$  で定義されたパラメータ  $k$  の関数  $\phi(k)$  が次の各条件 (C1)-(C3) を満たすとする。

(C1)  $\phi(k) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  は  $k$  の連続関数

(C2) 任意の  $k_0 \in \Omega$  に対して、 $\phi(k_0) \in \mathbf{R}$  の値を計算することが可能である。

(C3) ある 2 変数多項式  $f(q, k_0)$  が存在し、任意の  $k_0 \in \Omega$  に対して  $\phi(k_0) \in \mathbf{R}$  は  $q$  に関する実根である。

このとき、 $\phi(k)$  を 2 変数多項式の実根として次の形で書き表すことが可能である (アルゴリズムの詳細については、([26],[29] を参照)。

$$\phi(k) = \begin{cases} \Psi_q(f(q, k), l_i) & (\nu_i < k < \mu_{i+1}) \\ \Psi_q(f(q, k), m_i) & (k = \nu_i) \end{cases} \quad (1)$$

### 例 1

例えば、 $A, B, C$  を次のように置いたとする。

$$A = \begin{bmatrix} -k-4 & 1 \\ 3 & -2k-3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

このとき [26] のアルゴリズムを使えば、次のシステム

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, y = Cx \quad (3)$$

の  $u$  から  $y$  への伝達関数  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  の  $H_\infty$  ノルム  $\|G(s)\|_\infty$  は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_\infty &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Psi_q(f(q, k), 1)}} & (-1 < k < 2) \\ \frac{1}{\sqrt{\Psi_q(f(q, k), 1)}} & (2 < k) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17k^2+46k+74+\sqrt{5}(k-2)\sqrt{29k^2+112k+128}}} & (-1 < k < 2) \\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17k^2+46k+74-\sqrt{5}(k-2)\sqrt{29k^2+112k+128}}} & (2 < k) \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $f(q, k)$  は以下で定義される多項式である。

$$\begin{aligned} f(q, k) = & (9q^2 - 17k^2q - 46kq - 74q + 4k^4 + 44k^3 + 157k^2 + 198k + 81) \\ & (13q^2 - 2k^2q - 96kq - 138q + 9k^4 + 24k^3 + 82k^2 + 448k + 637) \end{aligned} \quad (5)$$

求めたい関数  $\phi(k)$  ( $k \in \langle \underline{k}, \bar{k} \rangle$ ) が (C1)-(C3) の条件を満たしているとする、下記のアルゴリズムで (1) の  $l_i, m_i, \nu_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) を計算することが出来る。

#### アルゴリズム 1

$(l_i, m_i, \nu_i)$  ( $i = 1, \dots, p$ ) の計算

(1)  $\nu_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) を  $\text{Res}_q(f(q, k), \frac{\partial f}{\partial q}(q, k)) = 0$  の実根で  $\nu_i \in \langle \underline{k}, \bar{k} \rangle$  を満たすものとし、 $\nu_0 = \underline{k}$ ,  $\nu_{p+1} = \bar{k}$  とする。

(2)  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) を  $\nu_i < \mu_i < \nu_{i+1}$  を満たすものとし、 $\phi(\mu_i)$  ( $i = 0, \dots, p$ ) の値を計算し、下記を満たす整数  $l_i$  ( $i = 0, \dots, p$ ) を求める。

$$\phi(\mu_i) = \Psi_q(f(q, \mu_i), l_i) \quad (i = 0, \dots, p) \quad (6)$$

(3)  $\phi(\nu_i)$  ( $i = 0, \dots, p$ ) の値を計算し、下記を満たす整数  $m_i$  ( $i = 0, \dots, p$ ) を求める。

$$\phi(\nu_i) = \Psi_q(f(q, \nu_i), m_i) \quad (i = 1, \dots, p) \quad (7)$$

## 4 根による表現の活用

今、 $\phi(k)$  を満たす  $k$  の関数とする。 $\phi(k)$  が (1) のようにある多項式の根の形で表現されれば、次のような性質を調べることが可能である。

(a) パラメータ  $k$  が  $\pm\infty$  に発散するときの  $\phi(k)$  の漸近的な振る舞い。

(b)  $\phi(k)$  をパラメータ  $k$  で微分した時の導関数  $\phi'(k)$  の零点 ( $\phi(k)$  の極値) を調べる。

上の (a) を行うには、 $\bar{k} = 1/k$  とおき、 $\bar{k} = 0$  での Puiseux 級数展開を調べればよい。(b) を行うには、連立代数方程式

$$\frac{df}{dk}(q, k) = 0, \quad f(q, k) = 0 \quad (8)$$

を  $\frac{dq}{dk}$  について解く。

## 5 制御系設計への応用

ここでは、(1) の表現の下記の  $H_\infty$  問題への適用を考える。

(D1)  $H_\infty$  ノルムの計算

(D2) 状態フィードバックによる  $H_\infty$  ノルム最適化問題

## 5.1 $H_\infty$ ノルムの計算

下記で定義されるシステム

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad (9)$$

が与えられたとき、その伝達関数  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  の  $H_\infty$  ノルム

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) \quad (10)$$

を求める問題を考える。ただし、 $j$  は単位純虚数、 $\sigma(\bar{M})$  は行列  $M$  の最大特異値 ( $= \sqrt{M^* M}$  の最大固有値) を表す。制御理論の方では、この  $H_\infty$  ノルムの計算には2分法を用いることが一般的であるが、この2分法は次のよく知られた定理にその基礎を置いている。

### 定理 1

行列  $H$  を

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2} BB^* \\ -C^* C & -A^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

と定義する。 $\gamma (> 0)$  を与えられた実数とすると、 $\|G(s)\|_\infty < \gamma$  の必要十分条件は  $H$  は虚軸上に固有値を持たないことである。

式 (9) の  $A, B, C$  の要素がパラメータ  $k$  多項式であるとき、そのシステムの  $H_\infty$  ノルム  $\|G(s)\|_\infty$  はもちろん  $k$  の関数であるが、これが上の (C1), (C2) の条件を満たすことは明らかである。よって、(C3) の条件を満たす2変数多項式  $f(q, k)$  が求まれば  $H_\infty$  ノルム  $\|G(s)\|_\infty$  を (1) の形で表すことが可能である。

よってこのような多項式  $f(q, k)$  を求めることを考える。まず、行列  $H$  の次の性質に注目する。

$$\begin{cases} \lambda \text{ が行列 } H \text{ の固有値ならば、} -\lambda \text{ も行列 } H \text{ の固有値である。} \\ \text{すなわち、} H \text{ の固有値は } \pm\lambda_1, \dots, \pm\lambda_n \text{ の形を取る。} \end{cases} \quad (12)$$

この性質と先の 定理 1 より、次式を得る。

$$\|G(s)\|_\infty \in \{\gamma \in \mathbf{R} \mid H \text{ が重複固有値を持つ}\} \quad (13)$$

ここで

$$H \text{ が重複固有値を持つ} \Leftrightarrow h(x) (= \text{Det}(xI - H)) \text{ が重根を持つ} \Leftrightarrow \text{Res}_x(h(x), \frac{dh}{dx}(x)) = 0 \quad (14)$$

を考えると

$$\|G(s)\|_\infty \in \{\gamma \in \mathbf{R} \mid \xi(1/\gamma^2, k) = 0\} \quad (15)$$

を得る。ただし、 $\xi(1/\gamma^2, k)$  は以下で定義される  $1/\gamma^2, k$  の多項式である。

$$\xi(1/\gamma^2, k) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Res}_x(h(x), \frac{dh}{dx}(x)) \quad (16)$$

ゆえに、 $q = 1/\gamma^2$  と置くと

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{q \in \mathbf{R} \mid \xi(q, k) = 0\} \quad (17)$$

となる。これより、 $f(q, k)$  を  $\xi(q, k)$  の無平方部分とすると

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} \in \{q \in \mathbf{R} \mid f(q, k) = 0\} \quad (18)$$

$m$	3	4	5	6	7	8
$\langle 1 \rangle$	0.018	0.022	0.0604	0.108	0.24	0.545
$\langle 2 \rangle$	0.016	0.0842	0.325	1.05	3.00	5.40
$\langle 3 \rangle$	0.771	2.88	11.6	40.7	197.	553

表 1: アルゴリズム 2 の計算時間 (単位: 秒)

となるので、 $\phi(k) = \frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2}$  とおき、アルゴリズム 2 を用いると

$$\frac{1}{(\|G(s)\|_\infty)^2} = \begin{cases} \Psi_q(f(q, k), l_i) & (\nu_i < k < \nu_{i+1}) \\ \Psi_q(f(q, k), m_i) & (k = \nu_i) \end{cases} \quad (19)$$

を満たす  $l_i, m_i, \nu_i$  が計算できる。これより

$$\|G(s)\|_\infty = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Psi_q(f(q, k), l_i)}} & (\nu_i < k < \nu_{i+1}) \\ \frac{1}{\sqrt{\Psi_q(f(q, k), m_i)}} & (k = \nu_i) \end{cases} \quad (20)$$

を得る。

## アルゴリズム 2

( $H_\infty$  ノルムを (20) の形で計算する)

- (1) 式 (11) の  $H$  の特性多項式  $h(x)$  を計算する。
- (2)  $q = 1/\gamma^2$  とおき、 $\xi(q, k) = \text{Res}_x(h(x), \frac{dh}{dx}(x))$  を計算する。
- (3)  $\xi(q, k)$  を無平方化し、その無平方部分を  $f(q, k)$  とする。
- (4)  $f(q, k)$  に対し基本アルゴリズムを適用し、(20) を満たす  $l_i, m_i \in \mathbf{Z}, \nu_i \in \mathbf{R}$  を求める。

表 1 にランダムに生成したシステムに対し上のアルゴリズムを適用し、その  $H_\infty$  ノルムを (20) の形で計算した時の計算時間を示す。ただし、 $m$  はシステムの次数を表す。表よりわかるように、 $m = 8$  まで実用的な時間で  $H_\infty$  ノルムが計算できている。

## 5.2 状態フィードバックによる $H_\infty$ ノルム最適化問題

ここでは、状態フィードバックによる  $H_\infty$  ノルム最適化問題を考える。具体的には次のシステム

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad z = Cx + Du \quad (21)$$

に対して、状態フィードバック  $u = -Fx$  による制御をかけたシステム

$$\frac{dx}{dt} = (A - B_2 F)x + B_1 w, \quad z = (C - DF)x \quad (22)$$

が次の 2 つの条件を満たすようにする制御系設計問題である。

(E1) システムが安定 ( $A - B_2 F$  の全ての固有値の実部が負)

(E2)  $w$  から  $z$  までの伝達関数  $G(s) = (C - DF)(sI - A + B_2F)^{-1}B_1$  の  $H_\infty$  ノルム  $\|G(s)\|_\infty$  が最小である。

言い換えると、次の条件付最小化問題である。

$$\min_{A-B_2F \text{ が安定}} \|(C - DF)(sI - A + B_2F)^{-1}B_1\|_\infty \quad (23)$$

先の  $H_\infty$  ノルムの計算と同様に、制御工学の方ではこの最小化問題を直接解くのではなく、代わりに次の問題を考える（システムがパラメータを含まないならば、この問題が解ければあとは2分法を用いて上の最小化問題の解を求めることが出来る）。

(E1)' システムが安定 ( $A - B_2F$  の全ての固有値の実部が負)

(E2)'  $w$  から  $z$  までの伝達関数  $G(s) = (C - DF)(sI - A + B_2F)^{-1}B_1$  の  $H_\infty$  ノルム  $\|G(s)\|_\infty$  が与えられた実数  $\gamma$  以下である。

言い換えれば、次の条件を満たす制御系を設計する問題である。

$$(A - B_2F) \text{ が安定, } \|(C - DF)(sI - A + B_2F)^{-1}B_1\|_\infty < \gamma \quad (24)$$

$H$  を次のように定義するとき

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^T - B_2B_2^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix} \quad (25)$$

制御理論では、上の (E1)', (E2)' の必要十分条件として、次の条件が知られている。

(F1) 下に定義する行列  $H$  が虚軸上に固有値を持たない。

(F2)  $\text{Det}(X_1) \neq 0$

(F3)  $X = X_2X_1^{-1}$  (実対称行列) の全ての固有値が正である。

ただし、 $u_i$  を  $H$  の実部が負である固有値に対応する固有ベクトルとすると、上の  $X_1, X_2$  は次で定義される正方行列である。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

$\gamma$  が十分大きいならばもちろん、(24) を満たす制御器  $u = -Fx$  が存在するので、上の (F1), (F2), (F3) の条件は満たされている。 $\gamma$  を小さくしていくと、 $\gamma$  が (23) の最小ノルムになったとき、(F1), (F2), (F3) のうち、少なくとも1つは満たされなくなる条件がある。これは言い換えると

$$(Fi) \text{ が満たされない} \rightarrow f_i(1/\gamma^2, k) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (27)$$

を満たす  $1/\gamma^2, k$  の多項式  $f_i(1/\gamma^2, k)$  があれば、 $f(1/\gamma^2, k)$  を

$$f(1/\gamma^2, k) = f_1(1/\gamma^2, k)f_2(1/\gamma^2, k)f_3(1/\gamma^2, k) \quad (28)$$

と置くことで

$$\gamma \text{ が (23) の最小ノルムである} \rightarrow \exists i, (Fi) \text{ が満たされない} \rightarrow f(1/\gamma^2, k) = 0 \quad (29)$$

となるので、アルゴリズム 2 を用いて (23) の最小ノルムを (1) の形で計算できることになる。よって上の (F1),(F2),(F3) の各条件に対して、(27) を満たす  $f_i(1/\gamma^2, k)$  を考える (以下では、前回と同様に  $\gamma$  の代わりに  $q = 1/\gamma^2$  を用いる)。

まず、(F1) を良く見ると、先ほどの  $H_\infty$  ノルムの計算と同様に考えれば

$$f_1(q, k) = \text{Res}_x(h(x), \frac{dh}{dq}(x)) \text{ の無平方部分} \quad (30)$$

と取れば (27) が満たされることがわかる (ただし  $h(x) = \text{Det}(xI - H)$ )。

次の (F2) については次のように考える。まず、 $H$  の固有ベクトル  $v(\lambda)$  を固有値  $\lambda$  を記号として残したままの形で計算する。

### アルゴリズム 3

#### ( $v(\lambda)$ の計算)

- 〈1〉  $x$  を  $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_{2n} \end{bmatrix}^T$  と置き、 $2n$  個の線形方程式  $(H - \lambda I)x = 0$  (ベクトル  $(H - \lambda I)x = 0$  の要素 1 つ 1 つが 1 つの線形方程式) を構成する (ここで  $\lambda$  は不定元である)。
- 〈2〉 〈1〉 の  $2n$  個の線形方程式より  $(2n - 1)$  個の線形方程式を選び、変数  $x_1, \dots, x_{2n-1}$  の方程式として解く。
- 〈3〉 解いた  $x_1, \dots, x_{2n-1}$  を  $x$  に代入した後、 $x$  の各要素が多項式となるように、 $x_i$  ( $i = 1, \dots, 2n - 1$ ) の分母の多項式の最小公倍式を  $x$  にかける。
- 〈4〉  $v(\lambda) \leftarrow x/x_{2n}$  と置き、 $v(\lambda)$  を出力する。

上のアルゴリズムで得られたベクトル  $v(\lambda)$  は固有値  $\lambda$  に対応する固有ベクトルを表しているので行列  $X_1(y_1, \dots, y_n), X_2(y_1, \dots, y_n)$  を

$$\begin{bmatrix} X_1(y_1, \dots, y_n) \\ X_2(y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v(y_1) & v(y_2) & \cdots & v(y_n) \end{bmatrix} \quad (31)$$

と定義すると、(F2) の  $X_1$  は  $X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  (ただし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は実部が負である  $H$  の固有値) で与えられる。ゆえに  $f_2(q, k) = \text{Det}(X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$  としたいのであるが、 $\text{Det}(X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$  は  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  を含んでいるため、 $q (= 1/\gamma^2), k$  の多項式にはならず、このままでは  $f_2(q, k)$  とすることができない ( $f_2(q, k)$  は  $q, k$  の多項式でなければならない)。よって次のような多項式  $f_2(q, k)$  を構成することを考える。

$$\text{Det}(X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 0 \Rightarrow f_2(q, k) = 0 \quad (32)$$

$f_2(q, k)$  がこの条件を満たせば、

$$(F2) \text{ が満たされない} \Rightarrow \text{Det}(X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 0 \Rightarrow f_2(q, k) = 0 \quad (33)$$

となり、(27) が満たされるのは明らかである。

### 補題 2

次の関数  $\zeta_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  は  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  の対称式である。

$$\zeta_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{\text{Det}(X_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n))}{\prod_{l < m} (\lambda_l - \lambda_m)} \quad (34)$$



## 補題 3

次の関数は  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  の対称式である。

$$\prod_{s_m=\pm 1} \zeta_j(s_1\lambda_1, \dots, s_n\lambda_n) \quad (35)$$

## 補題 4

$\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  の対称式は  $q, k$  の多項式として表せる。すなわち

$$f_2(q, k) = \prod_{s_m=\pm 1} \zeta_j(s_1\lambda_1, \dots, s_n\lambda_n) \quad (36)$$

を満たす  $q, k$  の多項式  $f_2(q, k)$  が存在する。

式 (34) の  $\zeta_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  定義より、 $\lambda_l \neq \lambda_m$  ( $l \neq m$ ) ならば

$$\text{Det}(X_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 0 \Rightarrow \zeta_j(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \Rightarrow f_2(q, k) = 0 \quad (37)$$

が成り立ち、(32) を満たす  $f_2(q, k)$  が構成できた。 $\lambda_l \neq \lambda_m$  ( $l \neq m$ ) が成り立たない場合は  $f_1(q, k) = 0$  となるので、この場合にも (28) は成り立つ。以上より、 $f_2(q, k)$  を求める次のアルゴリズムを得る。

## アルゴリズム 4

(1) アルゴリズム 3 を用いて  $v(\lambda)$  を計算する。

(2) (31) により、 $X_1(y_1, \dots, y_n)$  を計算する。

(3)  $\zeta_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  を (34) により計算する。

(4) 式 (35) を計算し ( $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$  の対称式となる)、 $q, k$  の多項式として表したものを  $f_2(q, k)$  とおく。

最後に (F3) の条件について考える。 $X_2X_1^{-1}$  が実対称行列であることから、その固有値は全て実数である。よって、その固有値は実軸上を動き、(F3) の条件が満たされなくなった瞬間には  $X_2X_1^{-1}$  の固有値で 0 のものが存在する。これは  $\text{Det}(X_2X_1^{-1}) = \text{Det}(X_2)/\text{Det}(X_1) = 0$  を意味するが、先の (F2) の条件を考えるときに  $\text{Det}(X_1) = 0$  の場合を考えたので  $\text{Det}(X_1) \neq 0$  と仮定してよい。よって

$$\text{Det}(X_2) = 0 \Rightarrow f_3(q, k) = 0 \quad (38)$$

を満たす  $q, k$  の多項式  $f_3(q, k)$  を求めればよい。これは先のアルゴリズム 4 のステップ (2), (3), (4) において、 $X_1(y_1, \dots, y_n), \zeta_1(\lambda_1, \dots, \lambda_n), f_2(q, k)$  をそれぞれ  $X_2(y_1, \dots, y_n), \zeta_2(\lambda_1, \dots, \lambda_n), f_3(q, k)$  に置き換えて計算を行えばよい。

以上より、(23) の最小値を (1) の形で表す次のアルゴリズムを得る。

## アルゴリズム 5

((23) の最小値を (1) の形で表す)

(1) 式 (30) より、 $f_1(q, k)$  を計算する。

(2) アルゴリズム 3 より、 $f_2(q, k)$  を計算する。

(3) アルゴリズム 3 において、 $X_1(y_1, \dots, y_n) \rightarrow X_2(y_1, \dots, y_n), \zeta_1(y_1, \dots, y_n) \rightarrow \zeta_2(y_1, \dots, y_n), f_2(q, k) \rightarrow f_3(q, k)$  の置き換えを施したアルゴリズムを実行し、 $f_3(q, k)$  を計算する。

- (4)  $f_1(q, k)f_2(q, k), f_3(q, k)$  の無平方分解を計算し、 $f(q, k)$  をその無平方部分とする。
- (5)  $f(q, k)$  に対し、アルゴリズム 2 を実行し、(23) の最小値を (1) の形で表した時の  $l_i, m_i, \mu_i$  を計算する。

実際に上のアルゴリズムを用いて制御系設計を行ってみると、制御対象の次数  $n$  が  $n = 2 \sim 5$  までは実用時間内に計算を行うことが出来、 $n = 6$  の時には、数時間程度の時間がかかった。実用にはアルゴリズムの更なる効率化が必要と思われる。

## 6 結論

パラメータを用いた制御系設計について議論した。特に、「制御系設計に関する量の多くは多項式の根として表せる」という事実に着目し、 $H_\infty$  ノルムに関する制御系設計問題へパラメータを導入する方法について解説した。本手法を用いることにより、パラメータを含んだシステムの  $H_\infty$  ノルム等を多変数多項式の根として表すことができる。このアルゴリズムを実際のシステムに適用するためには、計算効率の向上などが必要であり、これが今後の課題である。

## 参 考 文 献

- [1] T. Kitamoto, "Approximate Eigenvalues, Eigenvectors and Inverse of a Matrix with Polynomial Entries," Japan J. Indus. Appl. Math., Vol. 11, No. 1, pp. 73-85, 1994.
- [2] 北本, "近似固有値、固有ベクトルとその最適制御への応用," 電子情報通信学会論文誌, Vol. J78-A, No. 4, pp. 531-534, 1995.
- [3] T. Kitamoto, "Approximate Kernel Space and Its Application to the Computation of Multivariate Polynomial GCD," Proc. of Asian Symposium on Computer Mathematics, pp. 165-174, Beijing, China, 1995.
- [4] T. Kitamoto, "Computation of Jordan decomposition in the form of power series," Proc. of ATCM'95, pp. 649-658, 1995.
- [5] T. Kitamoto, "Hensel Construction with Arbitrary Degree of Convergence," Japan J. Indus. Appl. Math., Vol. 13, No. 2, pp. 203-215, 1996.
- [6] 北本, "近似代数を用いた  $H_2$  最適制御系の解析と設計," 電子情報通信学会論文誌, Vol. J81-A, No. 2, pp. 289-292, 1998.
- [7] 北本, "代数的 Riccati 方程式のべき級数解の計算法について," 電子情報通信学会論文誌, Vol. J81-A, No. 3, pp. 445-447, 1998.
- [8] 北本, "近似固有値の計算法について," 電子情報通信学会論文誌, Vol. J81-A, No. 4, pp. 803-806, 1998.
- [9] T. Kitamoto, "On Puiseux Expansion of Approximate Eigenvalues and Eigenvectors," IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E81-A, No. 6, pp. 1242-1251, 1998.
- [10] T. Kitamoto, "Approximate Singular-value Decomposition of a Matrix with Polynomial Entries," Proc. of ATCM'98, Tsukuba-shi, pp. 342-351, Springer-Verlag Singapore, 1998.
- [11] 北本, "近似代数とその制御系設計への応用" システム/制御/情報, No. 12, pp. 669-677, 1998.

- [12] T. Kitamaoto, "Efficient Computation of the Characteristic Polynomial of a Polynomial Matrix," IEICE Trans. Fundamentals, E82-A, No.5, pp. 842-848, 1999.
- [13] Bo Yu and T. Kitamaoto, "The CHACM method for Computing the Characteristic Polynomial of a Polynomial Matrix," IEICE Trans. Fundamentals, E83-A, No. 7, pp.1405-1410, 2000.
- [14] 北本, "近似逆行列の高次収束計算式について" 電子情報通信学会論文誌, J84-A, No. 2, pp.243-245, 2001.
- [15] 北本, "記号的ニュートン法の高次収束への拡張について" 電子情報通信学会論文誌, J84-A, No. 7, pp. 983-988, 2001.
- [16] T. Kitamoto, "Solution of a Linear Differential Equation in the Form of Power Series and its Application to Control System Design," Proc. of ASCM2001, Matsuyama-shi, pp. 46-55, 2001.
- [17] 北本, "近似根の効率的計算法について" 電子情報通信学会論文誌, J85-A, No.2, pp.189-196, 2002.
- [18] T. Kitamoto, "On Computation of Approximate Eigenvalues and Eigenvectors," IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E85-A, No. 3, pp. 664-675, 2002.
- [19] 佐伯, 北本, "LQ 制御に対する定数出力フィードバックゲインのホモトピー追跡" システム制御情報学会論文誌, Vol. 16, No. 11, pp. 558-564, p. 2003.
- [20] T. Kitamoto, "Computation of the Peak of Time Response in the Form of Formal Power Series", IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E86-A, No. 12, pp. 3240-3250, 2003.
- [21] T. Kitamoto, "Accurate computation of a high degree coefficient of a power series root," IEICE Trans. Fundamentals, Vol. E88-A, No. 3, pp. 718-727, 2005.
- [22] 北本, "SCILAB へのべき級数の導入とその制御系設計への応用", 数式処理 Journal of JSSAC, Vol. 11, No. 3/4, pp. 99-117, p. 2005.
- [23] T. Kitamoto, "On computation of a power series root with arbitrary degree of convergence", submitted to Japan J. Indus. Appl. Math..
- [24] H. Anai and H. Yanami, "SyNRAC: A maple-package for solving real algebraic constraints," Proc. of CASA'2003, P.M.A. Sloot et al. (ICCS 2003) editors, Vol. 2657 of LNCS, Springer-Verlag, 2003.
- [25] 北本, "パラメータを含むシステムの  $H_\infty$  ノルムの計算について" 電子情報通信学会論文誌, J89-A, No.1, pp.25-39, 2006.
- [26] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "Parametric computation of  $H_\infty$  norm of a system," Proc. of ICCAS-SICE2006, Busan, Korea, 2006.
- [27] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "Modular method for the computation of the defining polynomial of the algebraic Riccati equation," Proc. of ICCAS2007, Proc. of ICCAS2007, Seoul, Korea.
- [28] T. Kitamoto and T. Yamaguchi "On the computation of the defining polynomial of the algebraic Riccati equation," Proc. of CASC 2007, Springer-Verlag series Lecture Notes in Computer Science, LNCS 4770, pp. 224-235, Bonn, Germany, 2007.
- [29] 北本, 山口 "パラメータを含むシステムの LQ 制御問題について" 電子情報通信学会論文誌, 掲載予定.
- [30] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "The optimal  $H_\infty$  norm of a parametric system achievable by a static feedback controller," IEICE Trans. Fundamentals, to appear.
- [31] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "The optimal  $H_\infty$  norm of a parametric system achievable by an output feedback controller," submitted to IEICE Trans. Fundamentals.

- [32] K. Zhou, J. Doyle and K. Glover, "Robust and Optimal Control," Prentice-Hall, Inc, New Jersey, 1996.
- [33] J. V. Z. Gathen and J. Gerhard, "Modern Computer Algebra," Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [34] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, "Ideals, Varieties, and Algorithms," Springer-Verlag, New York, 1991.
- [35] T. Becker and V. Weispfenning, "Gröbner Bases," Springer-Verlag, New York, 1993.
- [36] D. コックス, J. リトル, D. オシー, "グレブナー基底と代数多様体入門 (上, 下)", シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.
- [37] R.J. Walker, "Algebraic Curves," Springer-Verlag, New York, 1978.